CONVEGNO
PER I SESSANTA ANNI DI
Francesco Speranza

Interventi di:

FRANCESCO SPERANZA • NATALIA BALDISSERRI
LUIGIA BERARDI e FRANCO EUGENI • BRUNO D'AMORE • RUGGERO FERRO
PAOLO FREGUGLIA • FULVIA FURINGHETTI • MARIO GIONFRIDDO
LUCIA GRUGNETTI • LUCIO GUASTI • GABRIELE LUCCHINI
NICOLINA MALARA, CONSOLATO PELLEGRINO e ROSA IADEROSA
CARLO F. MANARA • FRANCA MANENTI VALLI • DANIELA MEDICI e PAOLA VIGHI
CARLO MARCHINI • RENATO MIGLIORATO • CLAUDIO OLEARI • PIERO PLAZZI
ALBA ROSSI DELL'ACQUA • CALOGERO TINAGLIA • ALDO VENTRE

DI MATEMATICA

Bologna, Dipartimento di Matematica, sabato 3 ottobre 1992

INDICE

Carlo Felice MANARA.

L'ASPETTO GEOMETRICO DI UNA QUESTIONE DI ECONOMIA. LA COERENZA DEL CONSUMATORE

1 - La teoria che cerca di descrivere e di spiegare, nei limiti del possibile, il comportamento del soggetto economico che viene chiamato "consumatore" è forse una delle più classiche: ricordiamo, a titolo di esempio, la trattazione che ne ha dato Vilfredo Pareto, applicando al problema del consumatore le note procedure che G.Lagrange aveva elaborato per la ricerca dei massimi o minimi condizionati delle funzioni di più variabili.

In questo lavoro intendiamo riprendere la questione utilizzando gli strumenti matematici offerti dalla teoria delle forme differenziali esterne.

A tal fine richiameremo per sommi capi la teoria classica, presentando poi le generalizzazioni che sono permesse dalla utilizzazione di strumenti i quali, per quanto classici per la matematica, sono tuttavia diversi da quelli abitualmente impiegati nella teoria economica. Questa utilizzazione ci permetterà di introdurre nelle nostre considerazioni il concetto di coerenza parziale, il quale, nelle nostre intenzioni, è destinato a generalizzare il concetto di coerenza; quest'ultimo concetto infatti potrebbe essere utilizzato per descrivere il comportamento del consumatore nei casi contemplati dalla teoria classica, (che, per intenderci, chiameremo paretiana) ma difficilmente può essere generalizzato rimanendo nell'ambito di questa teoria; crediamo invece che con l'impiego di strumenti matematici di potenza maggiore di quelli utilizzati dalla teoria paretiana sia possibile ampliare il concetto di coerenza, ed approfondire così l'analisi del comportamento del consumatore con strumenti matematici.

Osserviamo infine che, a nostro parere, le procedure che introdurremo possono essere utilmente adottate anche in altri capitoli della teoria economica, permettendo così una visione più ampia e profonda dei problemi ivi trattati.

2 - Nel seguito di questo nostro lavoro utilizzeremo metodicamente il linguaggio geometrico, che è comodo e suggestivo per l'esposizione; tuttavia è appena necessario osservare che questa convenzione non è lesiva della generalità e pertanto siamo convinti che essa non possa presentare difficoltà di intepretazione nei riguardi dei problemi di teoria economica dei quali ci occupiamo qui.

Indichiamo con X uno spazio euclideo reale ad n dimensioni (con $n \geq 3$); l'ipotesi che lo spazio sia euclideo ci permetterà di esprimere comodamente e sinteticamente certe relazioni, il cui significato, ripetiamo, rimarrà esclusivamente economico.

Scriveremo convenzionalmente:

(1) $$x = [x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n].$$

per indicare che il punto x ha per coordinate i numeri (reali) $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Indicheremo col simbolo X' il sottinsieme dei punti di X che hanno tutte le coordinate positive; porremo quindi:

(2) $$X' = \{x \in X \mid x_i' > 0,\ 1 \leq i \leq n\}$$

Indichiamo con A un insieme aperto, semplicemente connesso e limitato, contenuto in X'; si avra' quindi:

(3) $$A \subset X'.$$

Con le coordinate x_i ($1 \leq i \leq n$) indicheremo le quantità di merci o beni che un dato consumatore può acquistare.

E' noto che nella teoria classica, paretiana, del consumatore, si suppone che esista una funzione indice di utilità (o di ofelimità, secondo la terminologia di V.Pareto); indicheremo qui tale funzione con u, e supporremo che essa abbia valori reali e sia definita e continua nell'aperto A. Si avrà quindi:

(4) $$u: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto u(x).$$

Come è noto, si può supporre che la funzione u(x) sia tale da stabilire una corrispondenza tra l'insieme A e la retta reale R, in modo che l'ordinamento totale che sussiste in R permetta di istituire un ordinamento totale anche nell'aperto A. Pertanto, dati due punti x,y di A, si suol dire che la situazione di possesso di beni indicata dalle coordinate di x è preferita dal consumatore a quella indicata dalle coordinate di y se e soltanto se si ha:

(5) $$u(x) > u(y).$$

Un insieme dei punti di A per i quali si abbia:

(6) $$u(x) = \text{costante}$$

viene chiamato "varietà di indifferenza", per evidenti ragioni.

Tralasciamo di soffermarci sulle discussioni riguardanti il significato del valore numerico preso dalla funzione u in un punto x di A, e ci limitiamo a ricordare che, quando sia data una funzione di ofelimità che svolga le funzioni attribuite qui alla u, anche un'altra qualunque funzione:

(7) $$F[u(x)]$$

dove F è una funzione continua, monotona e crescente in senso stretto, può essere assunta come funzione indice di utilità (ofelimità).

La corrispondenza stabilita dalla funzione u tra l'aperto A e la retta reale R trasforma quindi la relazione di preferenza tra due situazioni indicate da due punti x ed y nel confronto tra i valori reali presi dalla funzione u nei punti stessi; e la esistenza di un ordinamento totale sulla retta reale permette di concludere che la relazione di preferenza così stabilita possiede le proprietà seguenti:

a) due situazioni, corrispondenti a due punti x ed y di A, sono sempre confrontabili tra loro: in altre parole, il consumatore (che traduce le sue preferenze con i valori della funzione u) è sempre in grado di determinare se la situazione indicata dalle coordinate del punto x è per lui indifferente a quella indicata dalle coordinate di y; oppure se egli preferisce una situazione all'altra.

b) Se una situazione corrispondente alle coordinate di x è preferita a quella corrispondente alle coordinate di y , e questa a sua volta è preferita a quella corrispondente alle coordinate di un punto z, allora la situazione corrispondente alle coordinate di x è preferita a quella corrippondente a z. Con linguagio matematico, si suol dire che in questo caso la relazione di preferenza, stabilita così' dalla funzione di utilità, possiede la proprietà transitiva.

Converremo di dire che il consumatore che stabilisce le proprie preferenze nel modo descritto è "globalmente coerente" nell'aperto A.

* * *

3 - Per gli scopi della trattazione matematica si suole supporre che la funzione u di utilità possegga certe proprietà, che permettono la formulazione di certi problemi e la loro risoluzione con gli strumenti dell'analisi matematica. Le proprietà che supporremo valide per la funzione u sono le seguenti:

a) nell'aperto A la u possiede derivate prime e seconde, e queste ultime sono continue in tutto l'aperto A. Adottando il vocabolario dell'analisi matematica, si usa dire che in tutto l'aperto A la funzione u è di classe di derivabilità almeno 2.

Nel seguito, per brevità, adotteremo per le derivate parziali prime e seconde della funzione u le notazioni seguenti:

(1) $$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ed anche:

(2) $$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$$

In forza di classici teoremi di analisi matematica, si conclude che le ipotesi supposte valide per la funzione u permettono di assicurare che per le derivate seconde parziali della u valgono le relazioni:

(3) $$u_{ik} = u_{ki} \qquad (1 \le i,k, \le n)$$

b) nell'aperto A le ipersuperfici di indifferenza, rappresentate dalle equazioni:

(4) $$u = \text{cost.}$$

sono convesse in senso stretto. Di conseguenza, considerati due punti x, y di A, e considerati due numeri reali a e b che soddisfino alle condizioni seguenti:

(5) $$a>0, \quad b>0, \quad a+b=1,$$

ponendo:

(6) $$z = a\,x + b\,y\ ,$$

si ha sempre:

(7) $$u(z) > u(x) \quad , \quad u(z) > u(y).$$

* * *

4 - Come è noto, le ipotesi enunciate nel precedente paragrafo per la funzione u permettono di tradurre il problema del consumatore con il linguaggio dell'analisi matematica, e di risolvere il problema stesso con gli strumenti escogitati da G. Lagrange per la ricerca di valori estremali condizionati delle funzioni di più variabili.

A tal fine si suppone che esista un vettore p, che chiameremo vettore dei prezzi, le cui componenti sono i prezzi delle merci e dei beni che sono sul mercato e quindi sono acquistabili dal consumatore:

(1) $$p = [p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n].$$

Indichiamo poi con un numero reale non negativo R la spesa globale del consumatore, cioè la quantità di numerario che questi destina all'acquisto dei beni disponibili. Si avrà pertanto la relazione fondamentale:

(2) $$R = \sum_i p_i x_i$$

che esprime la spesa globale, destinata dal consumatore all'acquisto dei beni.

Da questa equazione, che viene spesso chiamata "relazione di bilancio", si deduce:

(3) $$\frac{\partial R}{\partial p_i} = x_i$$

alla quale faremo riferimento nel seguito.

Ammettiamo ora che il comportamento del consumatore tenda a cercare il punto x in corrispondenza al quale è massimo il valore di u, quando sia fissata la somma R, oppure a rendere minima la somma R quando sia fissato il valore della funzione u . Nel seguito diremo che la precedente proposizione esprime l'ipotesi fondamentale del comportamento del comsumatore, beninteso quando esista una funzione di utilità.

Traducendo con gli strumenti dell'analisi matematica l'ipotesi enunciata, si giunge a scrivere il sistema di equazioni (che diremo di Lagrange):

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_i &= k\, p_i \\ R &= \sum_i p_i x_i \end{aligned}$$

dove k è un numero reale, che viene abitualmente chiamato "moltiplicatore di Lagrange". L'eliminazione di k tra le equazioni della prima riga delle (4) conduce al sistema di equazioni:

$$(5) \qquad p_i u_k - p_k u_i = 0 \qquad (1 \leq i,k \leq n).$$

Queste sono in numero di $n(n-1)/2$, ma ovviamente soltanto $(n-1)$ tra loro sono linearmente indipendenti.

Il sistema costituito dalle equazioni (5) e dalla seconda delle (4) permette, nelle ipotesi poste, di considerare le p_i come funzioni delle x_i o queste ultime come funzioni delle p_i, nell'aperto A, quando siano valide le ipotesi enunciate e quando il consumatore regoli il proprio comportamento secondo l'ipotesi fondamentale enunciata poco sopra.

In particolare quindi è possibile considerare certe n funzioni:

$$(6) \qquad x_i = f_i(p|R)$$

le quali esprimono le quantità dei beni acquistate dal consumatore nelle ipotesi piu' volte enunciate, in funzione del vettore di prezzi p e della spesa globale R.

Come è noto, le funzioni (6) vengono richiamate con il nome ovvio di "funzioni di domanda del consumatore".

* * *

5 - Impiegando il linguaggio geometrico convenzionale di cui abbiamo detto nel paragrafo 1, il contenuto delle relazioni espresse dalle formule (4) del precedente paragrafo può essere espresso dicendo che in ogni punto x dell'aperto A l'iperpiano rappresentato dalla seconda delle equazioni (4) è tangente alla ipersuperficie di indifferenza che passa per il punto, ed è anche ivi normale al vettore dei prezzi delle merci e dei beni.

Le stesse circostanze possono essere descritte anche utilizzando la terminologia della teoria delle trasformazioni di contatto, dicendo che in ogni punto di A è data una "faccetta di indifferenza" per il consumatore; tale faccetta può essere rappresentata nel modo seguente: si consideri il polinomio lineare nei differenziali dx dato da :

$$(1) \qquad \pi = \sum_i p_i dx_i .$$

Queste polinomio lineare viene anche chiamato "forma di Pfaff" o anche brevemente "pfaffiano". Usando il linguaggio suggestivo dei differenziali, si può dire che il valore del pfaffiano π rappresenta la spesa (infinitesima) che il comsumatore deve fare per cambiare la propria situazione, spostandosi, a prezzi costanti, dal punto x di A ad un punto le cui coordinate sono accresciute (ovviamente in senso algebrico, cioè eventualmente anche con incrementi negativi) delle quantità dx_i .

La equazione:

$$(2) \qquad \pi = \sum_i p_i dx_i = 0$$

traduce la condizione che lo spostamento infinitesimo sia tangente all'ipersuperficie di indifferenza, e quindi avvenga ad utilità costante.

L'equazione (2) viene chiamata equazione di Pfaff, o anche equazione ai differenziali totali; essa sarà presa in considerazione nel seguito di questo lavoro, nello spirito e con i metodi di una teoria classica, che tratta le equazioni singole di questo tipo ed anche i sistemi di equazioni cosiffatte .

Anticipiamo qui alcune osservazioni, che giustificano il presente lavoro e le parole con le quali esso è stato presentato nel paragrafo 1.

Osserviamo anzitutto che l'equazione di Pfaff (2) consegue dalle ipotesi enunciate, cioè dalla esistenza di una funzione di utilità del consumatore e dal comportamento di questi secondo l'ipotesi fondamentale. In altre parole, in queste condizioni si possono prendere in considerazione delle funzioni di domanda, ed il comportamento del consumatore è globalmente coerente; il che significa che il consumatore può esprimere la preferenza (o l'indifferenza) di due situazioni corrispondenti a due punti x ed y di A, anche quando questi sono lontani tra loro. Invece la (2) traduce un comportamento del consumatore che riguarda soltanto situazioni molto vicine tra loro, e presuppone la esistenza soltanto di funzioni di domanda e non di funzioni globali di utilità. In altre parole, dalle ipotesi classiche si deduce la validità della (2), ma da questa non segue la validità delle ipotesi classiche; perché ciò avvenga occorre che siano verificate certe condizioni ulteriori, le quali, insieme con la (2) qualificano il comportamento globalmente coerente del consumatore. Se ciò non è, si può definire un concetto più ristretto di coerenza, come vedremo.

Osserviamo inoltre che, dal punto di vista delle applicazioni dei concetti che stiamo esponendo, ci pare più facile ed efficace l'escogitare delle procedure di osservazione che mirano alla verifica della (2) che il costruire delle procedure per la verifica dell'esistenza di una funzione indice di utilità in tutto l'aperto A.

* * *

6 - Come abbiamo visto, la teoria classica paretiana fornisce la descrizione del comportamento del consumatore con il sistema di equazioni (4) del paragrafo 4. Da queste equazioni discendono alcune relazioni che vengono chiamate "Equazioni di Slutsky" e che si deducono con procedimenti di derivazione dalle equazioni ricordate. Le relazioni di Slutsky sono le seguenti:

(1) $$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial x_i}{\partial R} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial x_k}{\partial R}$$

e per la loro dimostrazione rimandiamo ai manuali che trattano di Economia matematica [Cfr. per es. Manara e Nicola.- Elementi di Economia matematica. Milano, 1970].

A noi interessa qui dedurre queste relazioni nello spirito della teoria delle equazioni di Pfaff, di cui abbiamo detto nel paragrafo 5. A tal fine si può calcolare il differenziale esterno della forma di Pfaff π che è stata definita dalla (1) del paragrafo 5. Infatti, dalla (6) del paragrafo 4, tenendo conto della (3) dello stesso paragrafo, e ponendo:

(2) $$s_{ik} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial p_i}{\partial R}$$

si ottiene:

(3) $$d\pi = \sum_{i<k} (s_{ik} - s_{ki})\, dp_k \wedge dp_i$$

Pertanto il sussistere delle relazioni di Slutsky implica che la forma differenziale pfaffiana π sia chiusa, cioè che si abbia:

(4) $$d\pi = 0.$$

Viceversa, la teoria delle forme differenziali esterne assicura che, nelle ipotesi formulate per l'aperto A, il sussistere della (4) è anche condizione sufficiente perché l'equazione pfaffiana:

(5) $$\pi = 0$$

sia completamente integrabile, cioè perché esista un fascio di ipersuperfici

(6) $$u(x) = \text{costante}$$

tale che, in ogni punto di A sia abbia:

(7) $$du = \pi \quad .$$

Dalla teoria ricordata si ha inoltre che la condizione sufficiente per la completa integrabilità dell'equazione pfaffiana (5) si può esprimere in forma più generale, imponendo che esista una forma differenziale θ tale che si abbia:

(8) $$d\pi = \pi \wedge \theta.$$

Pertanto, in questo ordine di idee, si può asserire che il sussistere delle relazioni di Slutsky è condizione non soltanto necessaria, ma anche sufficiente perché il comportamento del consumatore sia globalmente coerente nell'aperto A.

7 - Abbiamo visto che gli strumenti della teoria delle forme differenziali esterne presentano un interessante significato delle classiche equazioni di Slutsky in relazione alla coerenza del consumatore. Possiamo ora porci il problema di indagare quale sia il significato della situazione più generale, la quale si presenta quando esistano delle funzioni di domanda del consumatore, e si possa quindi costruire la forma pfaffiana π, ma le relazioni di Slutsky non siano soddisfatte.

Ovviamente in questo caso non esiste una funzione di utilità, che possa servire come criterio di scelta con il quale il consumatore confronta due situazioni, e sulla quale egli fonda la coerenza delle proprie scelte. E' possibile tuttavia prendere in considerazione, anche in questo caso, alcune caratteristiche del comportamento del consumatore, le quali permettono di introdurre un concetto per così dire attenuato di coerenza.

A tal fine ricordiamo che, anche quando non vale la (8) del paragrafo precedente, è possibile determinare un intero p soddisfacente alla limitazione:

(1) $$2p \leq n-1$$

ed esistono 2p funzioni:

(3) $$z_1,\ z_2, \ldots z_p,\ v_1, v_2, \ldots, v_p$$

tali che il polinomio di Pfaff π può essere espresso nella forma seguente:

(4) $$\pi = du + z_1 dv_1 + z_2 dv_2 + \ldots\ldots + z_p dv_p .$$

Si trae da qui che l'equazione pfaffiana $\pi = 0$ è verificata sulla varieta' ad n-p-1 dimensioni definita dalle equazioni:

(5) $$u = c \text{ (costante)};\ v_i = c_i \quad (1 \leq i \leq p).$$

Tale varietà può quindi essere considerata come la immediata generalizzazione della varietà di indifferenza della teoria classica paretiana, e potrebbe essere chiamata varietà di indifferenza limitata o parziale.

Si osserva inoltre che la (5) costituiscono un sistema di p+1 equazioni in termini finiti, che legano le coordinate di un punto x appartenente all'aperto A; esistono quindi p+1 varietà ad n-p dimensioni, ognuna delle quali viene rappresentata da p equazioni scelte tra le (5). Una di queste, per esempio, è definita dalle equazioni:

(6) $$v_i = c_i \quad (1 \leq i \leq p);$$

su questa varietà varia soltanto la funzione u, la quale pertanto, con i suoi valori, può servire come criterio di confronto al consumatore tra due situazioni. Pertanto si può parlare di coerenza debole, o coerenza parziale del consumatore, il quale decida di rimanere su una varietà definita dalle equazioni (6) e regoli le sue scelte sul valore che la funzione u prende (beninteso in punti della varietà considerata). Analoghe considerazioni valgono ovviamente per ognuna delle altre varietà definite, come si è detto, da p equazioni scelte tra le (6).

Facendo riferimento al linguaggio della teoria delle trasformazioni di contatto, di cui abbiamo detto nel capitolo precedente, si suol dire che, se l'equazione di Paff (5) del paragrafo 6 è completamente integrabile, le faccette di indifferenza si possono organizzare in modo da essere tutte tangenti alle ipersuperfici di un fascio del tipo (6) del paragrafo 6 . Se invece l'equazione di Pfaff non è completamente integrabile, le faccette si possono organizzare in modo da essere tangenti a certe varietà di dimensione minore di (n-1).

* * *

8 - Pensiamo che si possano trovare degli esempi abbastanza elementari di casi nei quali in un sistema economico non sono soddisfatte le relazioni di Slutsky ed è quindi impossibile costruire una funzione globale di ofelimità e pertanto non si può pensare ad una coerenza globale del consumatore.

Tratteremo qui un caso del tutto teorico ed astratto; ma crediamo di non essere lontani dal vero pensando che bastino pochi ritocchi per ritrovare nella realtà dell'economia delle situazioni che si descrivono abbastanza bene con la trattazione che daremo. Richiamiamo pertanto ciò che abbiamo già detto nel paragrafo 2, osservando che il linguaggio geometrico, e l'immagine apparentemente astratta non ledono la generalità e la portata dei risultati che si conseguono per loro mezzo.

Prenderemo qui in considerazione il caso in cui l'aperto A in cui è definita la forma differenziale lineare π (pfaffiano) non sia tutto l'insieme dei punti ad n coordinate reali e positive; supponiamo invece che per alcune coordinate sussistano delle limitazioni superiori; per semplicità supporemo qui che ciò avvenga soltanto per la prima coordinata x_1; esista quindi una costante positiva C, tale che l'insieme A sia definito dalle relazioni:

(1) $0 < x_1 < C \quad ; \quad (i>1) \rightarrow 0 < x_i$.

Dal punto di vista del significato economico pensiamo che questa ipotesi sia atta a rendere abbastanza bene il caso che si presenta quando il bene, la cui quantità è indicata con x_1, non sia disponibile sul mercato in quantità indefinite, ma esista una frontiera superiore, atta a determinare ciò che viene chiamato un fenomeno di "scarsità" del bene stesso.

Si possono escogitare vari strumenti matematici per descrivere una siituazione nella quale un mercato non può fruire una quantità del bene N. 1 superiore al limite C. Possiamo scegliere qui di descrivere il fenomeno supponendo che il prezzo p_1 del bene N.1 cresca rapidamente quando la quantità domandata sul mercato si avvicina al limite superiore; per esempio possiamo supporre che, in presenza delle limitazioni (1), il prezzo della merce N. 1 sia espresso in funzione della quantità x_1 che è acquistata sul mercato, da:

(2) $$p_1(x_1) = a/x_1 + b/(C-x_1)^\mu,$$
essendo a e b due costanti positive opportune, ed essendo anche μ una costante positiva, che può essere opportunamente scelta in modo da provocare una brusca "impennata" del prezzo quando la quantità x_1 si avvicina a C nell'intervallo (1).

I prezzi degli altri beni potrebbero essere espressi da funzioni del tipo della seguente:

(3) $$p_i(x_i) = f_i(x_i) + g_i(x_1) ; \qquad i>1.$$
Le funzioni $g_i(x_1)$ possono essere scelte in modo da diventare crescenti (ma finite e regolari) quando la funzione $p_1(x_1)$ tende all'infinito positivo, al tendere di x_1 a C.

Si verifica allora che la forma pfaffiana π in questo caso non è in generale esatta e quindi la equazione di Pfaff:

$$\pi = 0 \tag{4}$$

non è in generale completamente integrabile. Pertanto in questo caso le scelte del consumatore possono non essere globalmente coerenti, nel senso della teoria classica (paretiana) del consumatore.

Nel prossimo paragrafo daremo la verifica di questo fatto nel caso particolare in cui si abbia $n = 3$.

Questa verifica, pur essendo eseguita, come faremo, su un caso particolare, ci pare tuttavia sufficiente per dimostrare che lo schema concettuale che presentiamo possa dominare un insieme di fenomeni economici che sfuggono alla teoria classica delle scelte dei consumatori.

* * *

9 - Come abbiamo annunciato, daremo qui un esempio di forma di Pfaff i cui coefficienti sono del tipo presentato nelle (2) e (3) del paragrafo precedente. Per semplicità, adotteremo qui dei simboli del tutto diversi da quelli utilizzati finora; quindi, nell'ipotesi $n = 3$, indichiamo con i soliti simboli x, y, z le coordinate cartesiane di un punto nello spazio tridimensionale; consideriamo una forma di Pfaff:

$$\pi = A\cdot dx + B\cdot dy + C\cdot dz, \tag{1}$$

e supponiamo che le funzioni $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ che figurano come coefficienti siano del tipo seguente:

$$A = a(x) \quad ; \quad B = b(y) + f(x) \quad ; \quad C = c(z) + g(x), \tag{2}$$

dove le funzioni a, b, c, f, g sono supposte regolari in un opportuno aperto Ω dello spazio ordinario tridimensionale.

Possiamo sempre pensare di aver scelto delle nuove variabili, che indicheremo con X, Y, Z in modo che si abbia:

$$dX = a\cdot dx \quad ; \quad dY = b\cdot dy \quad ; \quad Z = c\cdot dz; \tag{3}$$

quindi la π sarà espressa, nelle nuove variabili, nella forma:

$$\pi = dX + dY + dZ + F(X)\cdot dY + G(X)\cdot dZ, \tag{4}$$

essendo F e G delle funzioni che si ottengono dalle f e g sostituendo la variabile x con la X, definita dalla prima delle (3).

Il differenziale esterno della (4) è dato chiaramente da :

$$d\pi = -\{F'dY + G'dZ\}\wedge dX, \tag{5}$$

e si verifica facilmente che, con l'esclusione di un insieme abbastanza ristretto di casi particolari, non esiste alcuna forma differenziale lineare:

$$\theta = \alpha\cdot dX + \beta\cdot dY + \tau\cdot dZ \tag{6}$$

tale che si possa scrivere:

(7) $d\pi = \pi \wedge \theta$.

Tanto basta per garantire che, in generale, la equazione di Pfaff $\pi=0$ non è completamente integrabile.

* * *

10 - Concludiamo le nostre considerazioni con alcune brevi osservazioni sul significato e sulla eventuale portata degli sviluppi teorici che precedono.

Anzitutto vorremmo osservare che abbiamo fatto riferimento qui al problema classico del consumatore soltanto per fissare le idee, ed evitare la eccessiva astrattezza di una trattazione troppo generale, che rischia di essere giudicata eccessivamente lontana dalle possibilità di applicazione ai problemi reali dell'Economia. In verità sarebbe abbastanza agevole estendere i concetti e gli sviluppi da noi qui presentati a problemi molto più generali: infatti è possibile applicare ciò che è stato esposto a molte altre problematiche economiche. Lasciamo agli economisti, il compito della generalizzazione delle suggestioni da noi qui presentate ad altri problemi economici.

A noi sembra interessante sottolineare qui il fatto che l'immagine geometrica può suggerire un linguaggio sintetico ed efficace per la formulazione dei problemi ed anche ispirare delle linee di soluzione; è chiaro che le immagini non forniscono sempre degli strumenti rigorosi per la risposta ai problemi che ci si presentano; ma sarebbe forse imprudente rinunciare alle suggestioni ed alle ispirazioni che sono fornite dalla fantasia, che ha sempre avuto un ruolo importante nella ricerca e nella creazione nel campo matematico.